БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ
«ВОРОНЕЖСКИЙ БАЗОВЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

М. Ю. Сердобинская

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по дисциплине «Математика»

для специальности 34.02.01 «Сестринское дело»

Тема: «Роль и место математики в современном мире. Функция. Предел функции в точке»

Воронеж
2024

Цели занятия:

1. Усвоение студентами системы знаний, развитие навыков усвоения учебного материала и нахождение причинно-следственных связей; освоение базовых компетенций;
2. Развитие умений учащихся обобщать полученные знания, проводить анализ, синтез, сравнения, делать нужные выводы;
3. Формирование умений общаться и работать в команде, пробуждение у студентов познавательного интереса к учебной дисциплине, развитие речи, мышления и воображения.

В результате:

Использовать математические знания в быту и применять их при решении практических задач. Уметь использовать формулы для определения функции и нахождения предела функции в точке.

Роль и место математики в современном мире. Функция. Предел функции в точке.

Целью изучения математики является – повышение общего кругозора, культуры мышления, формирование научного мировоззрения.

Как заметил выдающийся русский математик и кораблестроитель академик А. Н. Крылов, человек обращается к математике «не затем, чтобы любоваться неисчислимыми сокровищами. Ему прежде всего, нужно ознакомиться со столетиями испытанными инструментами и научиться ими правильно и искусно владеть». Постепенно вспомним, как обращаться с такими математическими инструментами, как функции и их графики, производная и интеграл, уравнения и неравенства.

Определение: ***Математика*** – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Академик Колмогоров А.Н. выделяет четыре периода развития математики: зарождение математики, элементарная математика, математика переменных величин, современная математика:

- период накопления первоначальных математических сведений; (до VI в. до н.э.)
- период математики постоянных величин; (VI в. до н.э.- XVI в н.э.) (средневековье) (э Возрождения, начало XV-XVI
- период математики переменных величин (XVII-XX вв.)
- период современной математики (XX)

Важным моментом современного периода математики является создание ЭВМ. Именно внедрение ЭВМ способствовало развитию таких направлений как: вычислительная математика, теория информации, программирование, математическое моделирование и пр. Для современного этапа характерно развитие прикладной математики. Она активно внедряется в гуманитарные науки: социологию, психологию, биологию, медицину. Это связано с тем, что математика является инструментом познания мира. Сила математики именно в ее способности создавать все более высокие абстракции, оперировать ими и изучать их особенности и закономерности.

Математика в биомедицинских науках

Активное применение математических методов в биомедицинских науках началось сравнительно недавно. Это связано с тем, что до начала XXв. биология и медицина относились к описательным наукам. Начало использования математических методов было связано со статистической обработкой результатов медико-биологических исследований. Так основоположник науки генетики Г. Мендель применял статистические методы для обработки результатов экспериментов с перекрёстным опылением гороха. Бельгийский антрополог А. Кетле опубликовал свои работы по статистической обработке психических и физических характеристик людей.

Проникновение математики в биологию стало возможным благодаря проникновению биологии во внутриклеточные процессы, и исследованию их на молекулярном уровне. (Движения отдельных молекул описываются диф. уравнениями). В качестве примера можно привести исследования функционирования и построения моделей некоторых функция нейрона и изучения проблем наследственности и расшифровки генетического кода

В современной медицине математические методы широко применяются для решения самых различных задач. Например:

- известный кардиохирург Н. М Амосов использовал аппарат дифференциальных уравнений и ЭВМ для математического моделирования физиологических функций организма человека и создания комплексной модели регуляции важнейших жизненных функций человека;
- в дальнейшем профессором В А. Лищуком была создана математическая модель кровообращения, которая применялась для индивидуального выявления нарушений после операции на сердце и выбранного лечения;

- для диагностики и прогнозирования состояния больных широко используют методы распознавания образов. Математические методы и современные компьютерные технологии лежат в основе *нового направления в медицине — визуализация медицинских изображений (компьютерная томография)*

В конце 80-х годов XX в. на стыке математической статистики и медицины возникло новое направление — *доказательная медицина* Цель которой перенести медицину из области искусства в область науки. А для этого необходимо применять строгие математические подходы как к проведению исследований, так и к обработке полученных данных

Ещё одна наука тесно связанная с математическими методами — это медицинская статистика (синоним: санитарная статистика, статистика в медицине и здравоохранении)— отрасль статистики, изучающая явления и процессы в области здоровья населения и здравоохранения.

Множества

Множество – это фундаментальное понятие не только математики, но и всего окружающего мира. Возьмите прямо сейчас в руку любой предмет. Вот вам и множество, состоящее из одного элемента.

В широком смысле, **множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое** (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам). Причём, это не только материальные объекты, но и буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т.д.

Обычно множества обозначаются большими латинскими буквами A, B, C, …, X, Y, Z *(как вариант, с подстрочными индексами: A_1, A_2, B_1 и т.п.)*, а его элементы записываются в фигурных скобках, например:

A={a, b, c, …, x, y, z} – множества букв латинского алфавита;

N={1, 2, 3, 4, 5, …} – множество натуральных чисел;

S_1={Аня, Ваня, Таня, Петя, Юля, Галя} -множество студентов

Множества A и S_1 являются конечными (состоящими из конечного числа элементов), а множество N – это пример бесконечного множества.

Кроме того, в теории и на практике рассматривается так называемое пустое множество:

$\emptyset$ - множество, в котором нет ни одного элемента.

Принадлежность множеству записывается знаком $\in$, а НЕ принадлежит записывается $\notin$.

Элементы множества обозначаются маленькими латинскими буквами a, b, c, …, x, y, z и, соответственно, факт принадлежности оформляется в следующем стиле: $x \in X$ – элемент x принадлежит множеству X.

Вышеприведённые множества записаны прямым перечислением элементов, но это не единственный способ. Многие множества удобно определять с помощью некоторого признака(ов), который присущ всем его элементам. Например:

$N^* = \{n \in N | n < 100\}$ – множество всех натуральных чисел, меньше ста.

На заметку: длинная вертикальная палка | выражает словесный оборот «которые», «такие что». Довольно часто вместе неё используется двоеточие: $N^* = \{n \in N : n < 100\}$ – давайте прочитаем запись более формально: «множество элементов n, принадлежащих множеству N натуральных чисел, таких, что n<100».

Данное множество можно записать и прямым перечислением: $N^* = \{1, 2, 3, \dots, 97, 98, 99\}$.

Операции над множествами

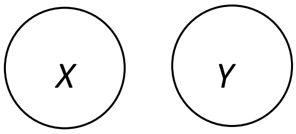
1. **Объединение множеств**

Объединением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат множеству X или множеству Y.

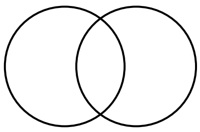
Обозначается X∪Y.

$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$.

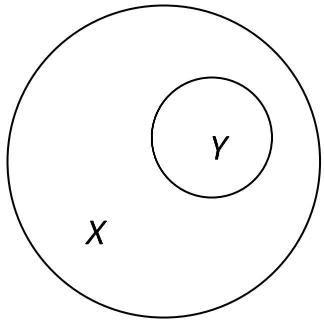
Рассмотрим все возможные случаи взаимного расположения множеств X и Y:

1. 

X∪Y

2. 

X∪Y

3. 

X∪Y=X

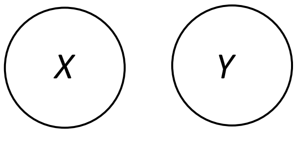
2. **Пересечение множеств**

Пересечением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из элементов, которые принадлежат как множеству X, так и множеству Y, то есть их общая часть.

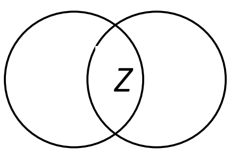
Обозначается X∩Y.

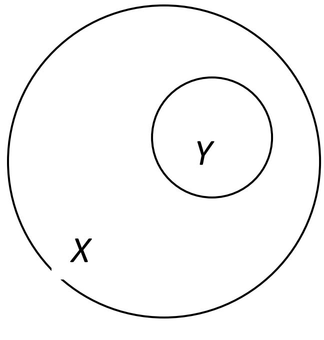
$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$.

Рассмотрим все возможные случаи взаимного расположения множеств X и Y:

1. 

X∩Y=∅



3. 

2.

$X \cap Y = Z$ $X \cap Y = Y$

Определение: Множества, которые не имеют общих элементов, называются **непересекающимися**.

Модуль числа

Определение: Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа а называется неотрицательное число, определяемое следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a > 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например: |6,3| = 6,3; |-2,7| = 2,7; |0| = 0.

Понятие функции

Определение функции можно дать несколькими способами. Все они будут дополнять друг друга.

1. **Функция** – это зависимость одной переменной величины от другой. Другими словами, взаимосвязь между величинами.

   $y = f(x)$ выражает идею зависимости одной величины от другой. Величина y зависит от величины x по определенному закону, или правилу, обозначаемому f.

   Другими словами: меняем x (независимую переменную, или аргумент) – и по определенному правилу меняется y.

2. **Функция** – это определенное действие над переменной.

   Это означает, что мы берем величину x, делаем с ней определенное действие (например, возводим в квадрат или вычисляем ее логарифм) – и получаем величину y.

3. Дадим ещё одно определение функции – то, что чаще всего встречается в учебниках.

<u>Определение:</u> **Функция** – это соответствие между двумя множествами, причем каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

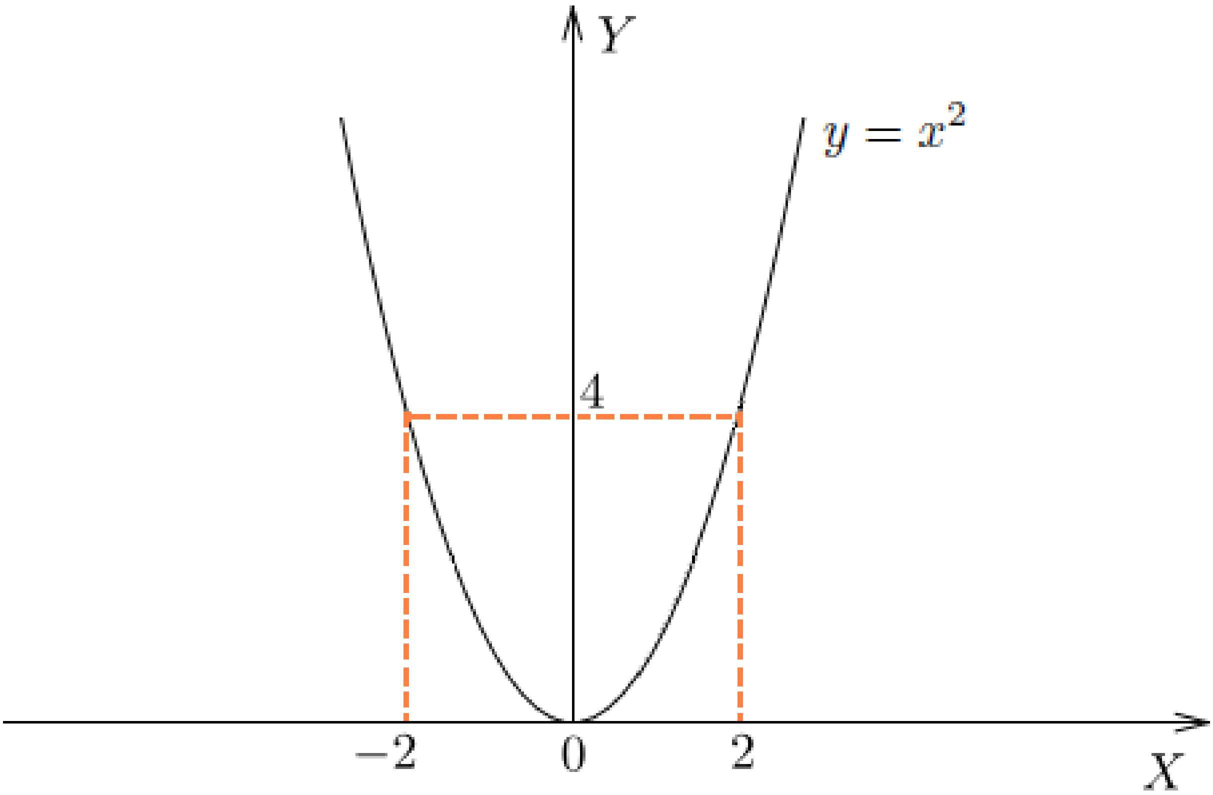
Например, функция $y = 2x$ каждому действительному числу x ставит в соответствие число в два раза больше чем x.

Каждому элементу множества X по определенному правилу мы ставим в соответствие элемент множество Y. Множество X называется *областью определения функции*. Множество Y – *областью значений*.

В математике есть такие взаимно-однозначные функции. Например, линейная функция $y = 3x + 2$. Каждому значению x соответствует одно и только одно значение y. И наоборот – зная y, можно однозначно найти x.

$\boldsymbol{x}$	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
$\boldsymbol{y = 3x + 2}$	*-7*	*-4*	*-1*	*2*	*5*	*8*

Могут быть и другие типы соответствий между множествами, которые не являются взаимно-однозначными. Примером такого соответствия в математике – функция $y = x^2$. Один и тот же элемент второго множества $y = 4$ соответствует двум разным элементам первого множества: $x = 2$ и $x = -2$.



Перечислим способы задания функции:

1. **С помощью формулы**

$$y = cosx$$

$$y = x^3 - 2x^2$$

$$z = f(t)$$

$$L(t) = L_0(1 + \alpha t)$$

2. **Графический способ.** Он является самым наглядным. На графике сразу видно все – возрастание и убывание функции, наибольшие и наименьшие значения, точки максимума и минимума.
3. **С помощью таблицы.** С этого способа вы когда-то начинали изучение темы «Функция» - строили таблицу и только после этого – график.
4. **С помощью описания.** Бывает, что на разных участках функция задается разными формулами. Известная вам функция $y = |x|$ задается описанием:

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Четные и нечетные функции

<u>Определение:</u> Функцию $y = f(x), x \in X$, называют **чётной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

<u>Определение:</u> Функцию $y = f(x), x \in X$, называют **нечётной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Есть чётные функции, нечётные функции, а также ни чётные, ни нечетные.

Чётная или нечётная функция $y = f(x)$ имеет симметричную область определения $D(f)$.

Если же $D(f)$ – несимметричное множество, то функция $y = f(x)$ не может быть ни чётной, ни нечётной.

Алгоритм исследования функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ на четность:

1. Исследовать область определения функции $D(f)$ на симметричность. Если область определения не симметрична, то функция ни четная, ни нечетная. Если область определения симметрична, то продолжать выполнять алгоритм.
2. Записать выражение $f(-x)$.
3. Сопоставить выражения $f(-x)$ и $f(x)$:
   a) При $f(-x) = f(x)$ для каждого $x \in D(f)$ функция является четной;
   b) При $f(-x) = -f(x)$ для каждого $x \in D(f)$ функция является нечетной;
   c) Если существует точка $x \in D(f)$, при которой $f(-x) \neq f(x)$, то функция $y = f(x)$ не будет четной;
   d) Если существует точка $x \in D(f)$, при которой $f(-x) \neq -f(x)$, то функция $y = f(x)$ не будет нечетной;

Если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси ординат, то $y = f(x)$ – четная функция.

Если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно начала координат, то $y = f(x)$ – нечетная функция.

Периодические функции

Определение: Функция называется **периодической** в области определения, если существует такое число $T \neq 0$, что:

1. $\forall x \in D(f), x + T \in D(f)$
2. $f(x + T) = f(x)$.

Определение: Число T называется **периодом функции** f .

Примерами периодических функция, являются тригонометрические функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с периодом $T = 2\pi$, то есть при изменении аргумента на число кратное 2π, значение функции остается прежним.

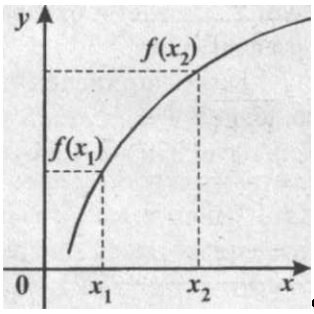
Возрастание и убывание функций

Определение: Функция $f(x)$ называется **возрастающей** (**убывающей**) в области определения, если для любых x_1 и x_2 из области определения функции, таких что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$

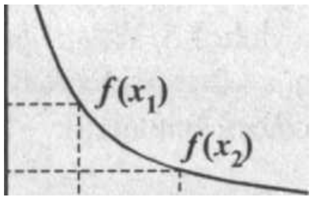
Определение: Функция $f(x)$ называется **невозрастающей** (**неубывающей**) в области определения, если для любых x_1 и x_2 из области определения функции, таких что $x_1 \leq x_2$ выполняется $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$

Все эти функции называются **монотонными.**

На рисунке приведены графики возрастающей (а) и убывающей (б) функций.



а



б

Ограниченные функции

<u>Определение:</u> Функция называется **ограниченной сверху (снизу)** на множестве X, если $\exists\ M\ (m),$ что $\forall\, x\ \in X\ => f(x)\ \leq M\ (f(x) \geq m)$.

<u>Определение:</u> Функция, ограниченная и сверху и снизу, называется **ограниченной на этом множестве.**

Нахождение области определения и области значений функции

При нахождении области определения функции, заданной аналитическим способом, независимая переменная принимает только те значения, при которых функция существует.

При этом следует учитывать, что:

- Дробь имеет смысл, если знаменатель отличен от нуля;
- Корень четной степени существует, если подкоренное выражение неотрицательно;
- Корень нечетной степени существует при любом значении подкоренного выражения;
- Показательная функция $y = a^x\ (a > 0, a\ \neq 1)$ определена на множестве всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < +\infty$;
- Логарифмы отрицательных чисел не существуют;

- Областью определения тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ является множество всех действительных чисел, т. е. $-\infty < x < +\infty$.

Для нахождения области значений функции необходимо подставлять значения аргумента в аналитическую формулу и определять границы, в которых находятся изменения зависимой переменной.

Обратная функция

Пусть дана функция $y = f(x)$, которая определена в некоторой области. Решим обратную задачу, т.е. для некоторого значения y_0 найдем соответствующее ему одно или несколько значений аргумента $\boldsymbol{x_0}$. Для этих значений функция будет равна y_0, т.е. $y_0 = f(x_0)$. Таким образом, если для каждого значения y из множества значений функции $y = f(x_0)$ ставится в соответствие одно или несколько значений x из области определения функции, то такая зависимость называется *обратной функцией* и обозначается
$x = Y(y)$. Областью определения обратной функции является область значений данной функции.

<u>Например:</u> Функция $y=2x$. Область определения — все действительные числа, т.е. $-\infty < x < +\infty$; область значений также. $-\infty < y < +\infty$.

Для любого значения y имеется одно значение x, равное $x = \frac{1}{2}y$. Следовательно, функция $x = \frac{1}{2}y$ есть однозначная обратная функция для функции $y = 2x$. Область определения обратной функции: $-\infty < x < +\infty$; область значений: $-\infty < y < +\infty$.

Графики прямой и обратной функций

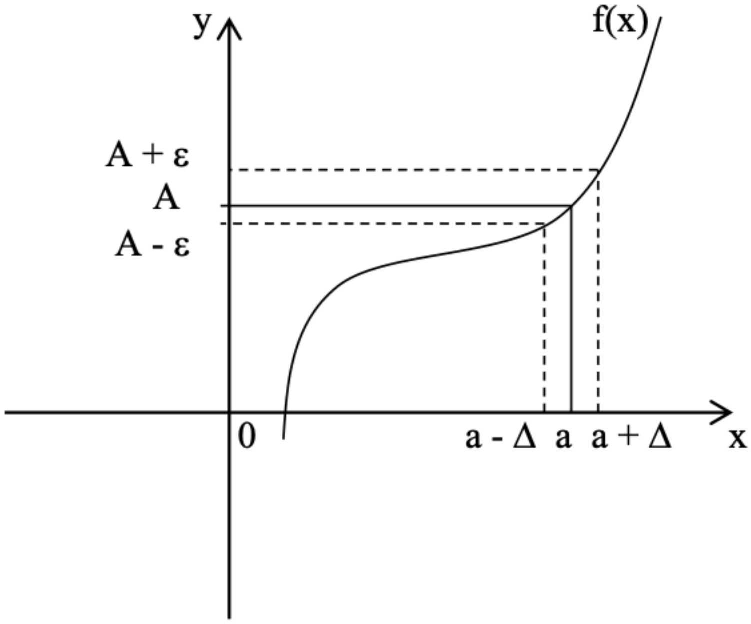
График обратной функции будет симметричен относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

<u>Пример:</u>

Найти область определения функции $f(x) = \frac{x-3}{2x-1}$

<u>Решение:</u> Функция $y = f(x)$ определена, если знаменатель $2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Таким образом, область определения состоит из двух промежутков $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Предел функции в точке

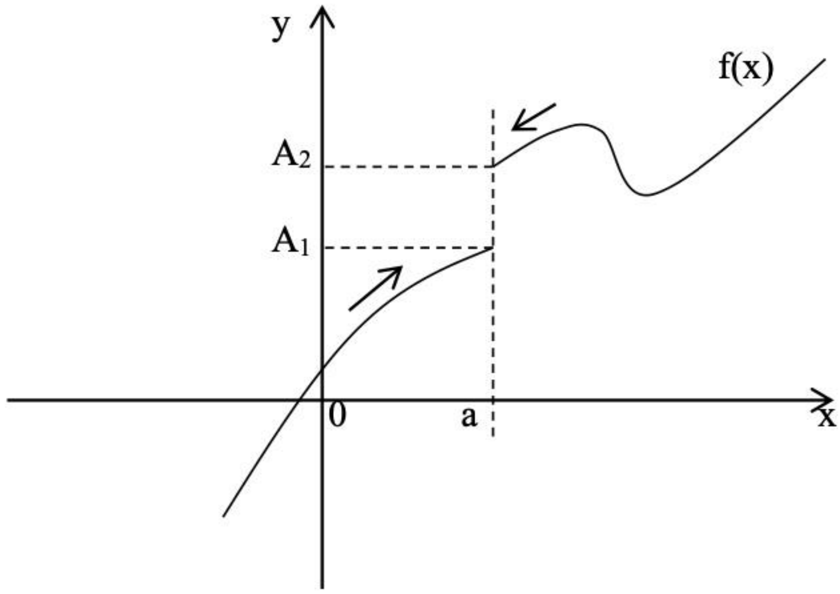


Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ (т. е. в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

<u>Определение:</u> Число А называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\Delta > 0$, что для всех x таких, что $0 < |x - a| < \Delta$ верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

<u>Определение:</u> Если $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ только при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ – называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$ слева, а если $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ только при $x > a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ называется **пределом функции** $f(x)$ в точке $x = a$ справа.



Приведенное выше определение относится к случаю, когда функция $f(x)$ не определена в самой точке $x = a$, но определена в некоторой сколь угодно малой окрестности этой точки.

<u>Определение:</u> Пределы A_1 и A_2 называются также **односторонними пределами** функции $f(x)$ в точке $x = a$. Также говорят, что А – конечный предел функции $f(x)$.

<u>Определение по Коши (критерий Коши):</u> А - предел функции $f(x)$ в точке $x = a$ существует тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

как только $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, где x' и x'' - любые точки из области определения функции $f(x)$.

<u>Символьная запись определения по Коши:</u>

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

<u>Определение по Гейне:</u> А называется пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если существует такая последовательность $\{x_n\} \to a$, если $x_n \neq a$, то

$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, соответствующая последовательность значений $f(x_n) \to A$, то есть $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Символьная запись определений по Гейне:

$$\forall\{x_n\}: \left((\forall n: x_n \neq x_0) \wedge \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0\right)\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

Замечание 1: из определения предела функции по Гейне следует, что функция не может иметь в точке два разные предела.

Замечание 2: понятие предела функции в точке есть локальное понятие: существование и значение предела полностью определяется значениями функции в как угодно малой окрестности этой точки.

Теоремы о пределах функций

Рассмотрим без доказательств основные теоремы о пределах функций, которые помогают находить пределы функций, представленных в виде алгебраических выражений.

Теорема 1: Если предел функции в точке x_0 существует, то он единственный.

Теорема 2: Предел постоянной равен этой постоянной:

$$\lim_{x\to x_0} C = C$$

Теорема 3: Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$, то

- Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

- Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Предел отношения двух функций равен отношению пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}, \text{ если } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

- Предел степени функции равен той же степени предела основания:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \to x_0} f(x))^n$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение: Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Определение: Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$